Primeira Prova de Teoria Eletromagnética I, 08/09/2010

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(2,0 pontos)*

Demonstre as seguintes regras de produtos para operações vetoriais (onde $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são funções vetoriais suaves):

(a) *(1,0 ponto)* $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$

(c) *(1,0 ponto)* $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

$$a) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_i \left(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \right) = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j}_{\text{Anti-sim x simétrico}} A_k \overset{0}{=} 0$$

$$b) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_i \left(\varepsilon_{ijk} A_j B_k \right) = \varepsilon_{ijk} \left(\partial_i (A_j B_k) \right)$$

$$= \underset{\oplus}{\varepsilon_{ijk}} (\partial_i A_j) B_k + \underset{\ominus}{\varepsilon_{ijk}} A_j (\partial_i B_k)$$

$$= B_k \, \varepsilon_{kij} \, \partial_i A_j - A_j \, \varepsilon_{jik} \, \partial_i B_k$$

$$= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

—— " —— " ——

(2ª questão) *(3,0 pontos)*

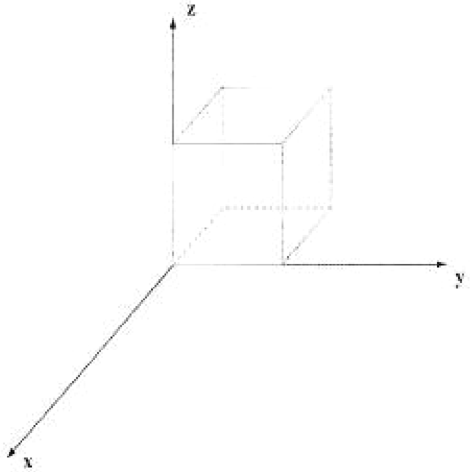
A figura abaixo mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cubo de 2,00 m de lado, imersa em um campo elétrico dado, em coordenadas cartesianas, por

$$\vec{E} = \left[(3,00x + 4,00)\,\hat{\imath} + 6,00\,\hat{\jmath} + 7,00\,\hat{k}\right] \text{ N/C},$$

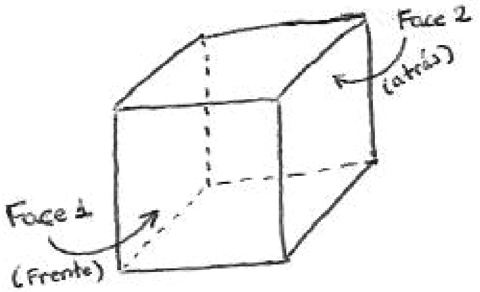
com x dado em metros.

(a) *(2,0 pontos)* Determine o fluxo elétrico total através da superfície gaussiana.

(b) *(1,0 ponto)* Determine a carga elétrica total contida no cubo em Coulombs. Dado útil: $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2 (N\,m^2)^{-1}$.



a)



Componentes constantes de $\vec{E}$ não contribuem p/ fluxo total, pois em cada par paralelo de faces teremos vetores normais opostos. Exemplo:

$$\underbrace{\vec{E}\cdot\hat{n}\,da + \vec{E}\cdot(-\hat{n})\,da}_{\text{CONSTANTE}} = 0$$

Componente não-constante: $\vec{E}_{\text{não-const}} = 3,00\,x\,\hat{\imath}$ N/C

Devemos então olhar p/ as faces com vetores normais $+\hat{\imath}$ e $-\hat{\imath}$ (faces ortogonais ao eixo x).

Face 1: $\Phi_1 = \vec{E}_{\text{não-const}} \cdot \hat{\imath}\, A = 3,00 \cdot (0) \cdot (4)\, \frac{N m^2}{C} = 0$

Face 2: $\Phi_2 = \vec{E}_{\text{não-const}} \cdot (-\hat{\imath})\, A = 3,00 \cdot (-2) \cdot (-1)\,(4)\, \frac{N m^2}{C} = 24 \frac{N m^2}{C}$

$\Rightarrow$ Fluxo total: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \Rightarrow \boxed{\Phi = 24\, N m^2/C}$

b) Lei de Gauss: $\Phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{in} = 24 \times 8,85 \times 10^{-12}\, C \Rightarrow \boxed{q_{in} = 2,12 \times 10^{-10} C}$

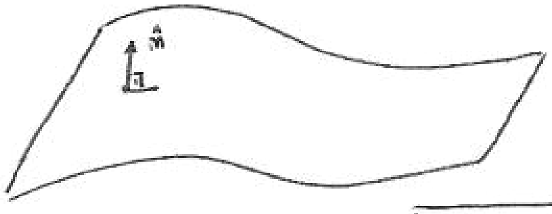
(3ª questão) *(2,0 pontos)*

Considere o vetor campo elétrico em torno de uma superfície de carga.

(a) *(1,0 ponto)* Escreva a condição de contorno $\vec{E}_{\text{acima}} - \vec{E}_{\text{abaixo}}$ a ser satisfeita pelo campo elétrico, onde $\vec{E}_{\text{acima}}$ é o campo *imediatamente* acima da superfície e $\vec{E}_{\text{abaixo}}$ é o campo *imediatamente* abaixo da superfície. Justifique em linhas gerais a origem dessa expressão.

(b) *(1,0 ponto)* Verifique que a condição de contorno é satisfeita para uma casca cilíndrica reta infinita uniformemente carregada.

a)



Superfície de carga.

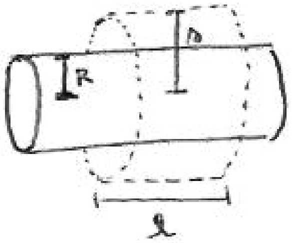
Condição de contorno: $\boxed{\vec{E}_{\text{acima}} - \vec{E}_{\text{abaixo}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$

onde $\hat{n}$ aponta de baixo p/ cima.

A expressão acima pode ser obtida a partir de:

- $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ (Lei de Gauss) $\rightarrow$ Determina a componente normal de $\vec{E}$ (descontínua). $(E^{\perp}_{\text{acima}} - E^{\perp}_{\text{abaixo}} = \sigma/\varepsilon_0)$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ ($\vec{E}$ é irrotacional) $\rightarrow$ Determina a componente tangencial de $\vec{E}$ (contínua). $(E^{\parallel}_{\text{acima}} - E^{\parallel}_{\text{abaixo}} = 0)$

b)



Fora: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \dfrac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2\pi s \,l = \dfrac{\sigma 2\pi R\, l}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R}{s}\hat{s}}$

Dentro: $Q_{in} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

$\Rightarrow \left(\vec{E}_{\text{acima}} - \vec{E}_{\text{abaixo}}\right)\Big|_{\text{superfície}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{\cancel{R}}{\cancel{R}}\hat{s} - \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{acima}} - \vec{E}_{\text{abaixo}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{s}}$ ok!

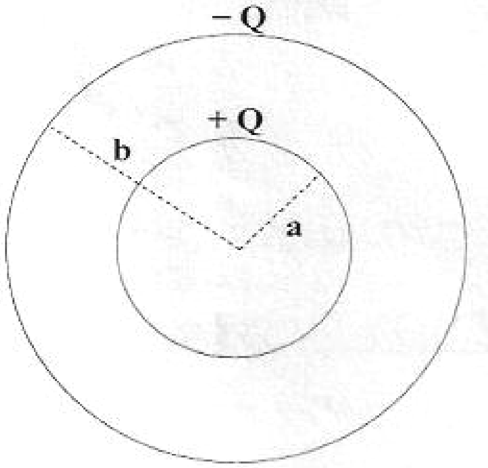
(4ª questão) *(3,0 pontos)*

Considere um capacitor composto por duas cascas metálicas esféricas concêntricas, com raios dados por a e b, conforme a figura abaixo. A casca de raio a está carregada com carga $+Q$ e a casca de raio b está carregada com carga $-Q$.

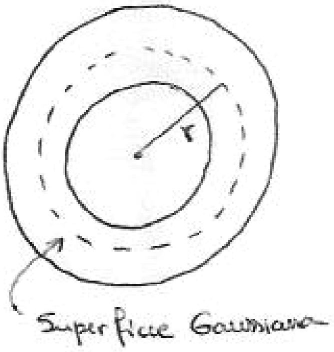
(a) *(1,0 ponto)* Determine o vetor campo elétrico gerado pelo conjunto das duas cascas nas regiões interna e externa às cascas.

(b) *(1,0 ponto)* Calcule a energia eletrostática desta configuração.

(c) *(1,0 ponto)* Determine a capacitância desse capacitor. Qual o significado físico do conceito de capacitância?



a)



$r<a$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \cancel{\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=0}$ $(r<a)$

$a<r<b$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}}$ $(a<r<b)$

$r>b$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \cancel{\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=0}$ $(r>b)$

b) $U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} E^2\, d\tau$ ($\mathcal{V}$ é todo o espaço)

$\vec{E}$ é não nulo apenas entre as cascas. Logo: $U = \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_a^b \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2 dr$

$\Rightarrow U = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0}}{2}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^{\cancel{2}}}Q^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b \Rightarrow \boxed{U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$

c) Dif. potencial entre as cascas: $V = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

$\Rightarrow C = Q/V \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \Big/ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\, ab/(b-a)}$ → Significado: Quanto de carga armazenamos por unidade de dif. potencial. Depende da geometria.